

## РЕЗУЛЬТАТЫ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ФАЗОВЫХ ЦЕПЕЙ С КОНЕЧНОЙ ДЛИНОЙ СЛОВА КОЭФФИЦИЕНТОВ

к. т. н. Мингазин А.Т.

РАДИС Лтд, Россия, Москва, Зеленоград, 124460, а/я 20.  
Тел./факс: 499-735-35-13, e-mail: [alexmin@radis.ru](mailto:alexmin@radis.ru)

Рассматриваются задачи синтеза цифровых фильтров на основе параллельного соединения двух фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов. Для их решения используется модифицированный алгоритм вариации исходных параметров. Представлены примеры синтеза ряда фильтров нижних частот рассмотренных в литературе. В большинстве случаев полученные результаты идентичны, а в других - близки к оптимальным решениям, найденным алгоритмом исчерпывающего поиска. При этом требуются существенно меньшие временные затраты компьютера.

Design problems of finite wordlength coefficient digital filters based on parallel connection of two allpass networks are considered. A modified algorithm of a variation of initial parameters (MVIP) for solution such problems is used. A set of design examples for low-pass filters considered in the literature is presented. It is shown that in the most of cases design results are identical, and in others – they are close to the solutions received by the algorithm of comprehensive search, but MVIP algorithm requires significantly smaller computer time.

**Введение.** Структура цифрового фильтра на основе параллельного соединения двух фазовых цепей [1-4] считается одной из лучших среди БИХ-структур. Для реализаций фильтров на СБИС важно минимизировать длину слова коэффициентов, а в исполнении без умножителей (умножители заменяются сумматорами и элементами сдвига), кроме того, желательно минимизировать общее число сумматоров в фильтре. Для решения этих задач (задач синтеза фильтров с конечной длиной слова коэффициентов) могут быть применены методы вариации коэффициентов (ВК) или исходных параметров (ВИП).

Для фильтров на основе параллельного соединения двух фазовых цепей лишь алгоритмы исчерпывающего перебора коэффициентов позволяют гарантировать глобально оптимальные решения. Однако эти алгоритмы могут потребовать больших или даже неприемлемых временных затрат (десятки часов работы компьютера [3]). Другие алгоритмы не гарантируют получения наилучших решений, но могут давать хорошие результаты за много меньшее время.

В [3] предложен алгоритм ВК, основанный на исчерпывающем переборе коэффициентов рассматриваемых фильтров. Для ряда примеров, требования к которым взяты из публикаций разных авторов, показана эффективность этого алгоритма в случае решений с минимальной длиной слова коэффициентов или с минимальным общим числом сумматоров, заменяющих умножители. Результаты совпадают, близки или существенно превосходят полученные другими алгоритмами, в том числе - [1,2]. В алгоритме ВИП [2] в случае фильтров нижних частот Золотарева-Кауэра варьируются неравность АЧХ в полосе пропускания  $\Delta a$  и граничные частоты  $f_1, f_2$  (минимальное ослабление АЧХ в полосе задерживания  $a_0$  - зависимый параметр). В [4] этот алгоритм был модифицирован введением еще одной переменной - порядка фильтра  $N_0$ , который в процессе поиска решения изменяется непрерывно, принимая нецелочисленные значения в соотношениях для расчета коэффициентов. Собственно порядок фильтра  $N$  остается при этом неизменным. Модифицированный алгоритм (МВИП) позволяет существенно улучшить результаты. В данной работе демонстрируются возможности алгоритма МВИП для всех фильтров нижних частот, синтезированных в [3]. Показано, что в большинстве случаев алгоритм МВИП приводит к результатам найденным в [3], а в остальных - близким к ним, но за существенно меньшее время счета на компьютере.

**Задачи синтеза фильтров.** Задачи синтеза фильтров могут быть сформулированы как

1. Максимальная взвешенная ошибка аппроксимации АЧХ фильтра  $\tilde{\epsilon} \leq 1$  при минимальной или заданной длине слова коэффициентов  $M$ .
2. Все как для задачи 1, но ошибка  $\tilde{\epsilon}$  должна быть минимальна.
3. Все как для задачи 1, но общее число сумматоров  $\Sigma$  (сумматоры, заменяющие умножители + структурные сумматоры) в фильтре должно быть минимально.

Здесь и далее знак  $\sim$  означает соответствие решению с конечной длиной слова коэффициентов или иначе с квантованными с шагом  $2^{-M}$  коэффициентами. Задача 3 часто решается при ограничении на число ненулевых бит  $m$  в каноническом знако-разрядном коде коэффициентов или с учетом исключения общих подвыражений в знако-разрядном коде. Второй вариант может приводить к лучшим результатам. Авторы [3] решали задачи 2 и 3, причем для задачи 3 использовали вариант с ограничением  $m$ .

**Передаточная функция.** Передаточная функция цифрового фильтра нижних частот на основе параллельного соединения двух фазовых цепей имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{2} \left[ \prod_{i=0,2}^K A_i(z) + \prod_{i=1,3}^K A_i(z) \right], \quad (1)$$

где  $A_0(z) = \frac{\alpha_0 + z^{-1}}{1 + \alpha_0 z^{-1}}$ ,  $A_i(z) = \frac{\beta_i + \alpha_i(1 + \beta_i)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \alpha_i(1 + \beta_i)z^{-1} + \beta_i z^{-2}}$ ,  $\beta_i < \beta_{i+1}$ ,  $K \leq (N-1)/2$ ,  $\alpha_i, \beta_i$  - искоемые квантованные коэффициенты. Предполагается, что порядок фильтра  $N$  нечетный. Такое представление передаточных функций  $A_i(z)$  позволяет реализовать их на базе волновых адаптеров [3]. Каждая фазовая цепь соответствует каскадному соединению фазовых звеньев  $A_i(z)$  не выше 2-го порядка.

**Требования к фильтрам.** Требования к АЧХ фильтров нижних частот представлены табл. 1. Здесь  $\Delta a_{\max}$  допустимая неравномерность в полосе пропускания,  $a_{0\min}$  - допустимое минимальное ослабление в полосе задерживания,  $f_{1n}$  и  $f_{2n}$  номинальные граничные частоты полосы пропускания и задерживания, соответственно. Данные табл. 1 заимствованы из [3], которые в свою очередь, за исключением требований 1, были взяты из ряда других источников. Найденные с помощью алгоритма исчерпывающего поиска коэффициенты для всех этих данных были представлены на <http://www.cs.tut.fi/~ylikaaki/CASILWD/results.m>. Требования 7, 11 и соответствующие результаты в самой статье [3] не приводятся.

Таблица 1. Требования к АЧХ фильтров нижних частот

№	$\Delta a_{\max}$ , дБ	$a_{0\min}$ , дБ	$f_{1n}$	$f_{2n}$
1	0,2	60	0,2	0,25
2	0,2	30	0,135	0,2
3	-	46	0,22	0,28
4	0,125	14/30	0,1875	0,25/0,2875
5	0,045	44	0,20625	0,2875
6	0,2	65	0,2125	0,2875
7	0,01	40	0,25	0,31
8	1	60	0,25	0,35
9	0,03	60	0,2125	0,2875
10	0,1	50	0,1	0,15
11	-	85	0,1875	0,3125

Указанные в табл.1 частоты нормированы относительно частоты дискретизации. Требования 3 и 11 относятся к полуполосным фильтрам и поэтому параметр  $\Delta a_{\max}$  не задан. В случае требований 4 параметр  $a_{0\min} = 14$  дБ и 30 дБ в полосе частот от 0,25 до 0,2875 и от 0,2875 до 0,5, соответственно.

**Результаты синтеза.** Результаты синтеза фильтров по требованиям табл.1, полученные алгоритмами МВИП [4] и исчерпывающего поиска [3], представлены табл.2. Здесь указаны номер фильтра согласно табл. 1, его порядок  $N$ , длина слова коэффициентов  $M$  и число ненулевых бит  $m$ , общее число сумматоров в структуре фильтра  $\Sigma$ , соответствующие параметры  $\tilde{\Delta a}$ ,  $\tilde{a}_0$ ,  $\tilde{\epsilon}$ , а также исходные параметры  $\Delta a$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $N_0$  при которых найдены эти результаты с помощью алгоритма МВИП. Для полуполосных фильтров 3 и 6 (при  $N=11$ ) показаны результаты вариации двух параметров  $f_2$  и  $N_0$ , а не четырех - как для других фильтров. Это отражено знаком XXX на месте незадействованного параметра в последней колонке и соответствующих строках табл.2. Для некоторых фильтров использованы разные значения  $N$  и  $M/m$ . Воспроизвести квантованные коэффициенты, соответствующие параметрам  $\tilde{\Delta a}$ ,  $\tilde{a}_0$ ,  $\tilde{\epsilon}$ , можно путем округления до  $M$  бит коэффициентов фильтра Золотарева-Кауэра рассчитанных по исходным параметрам  $\Delta a$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $N_0$  и  $N$  согласно табл.2. Оценки  $\tilde{\Delta a}$ ,  $\tilde{a}_0$ ,  $\tilde{\epsilon}$  в алгоритме МВИП, как и в [3], выполнялись по 40 точкам в каждой из полос фильтра. В табл.2 даны уточненные оценки по 500 точкам.

В табл. 2 общее число сумматоров показано суммой двух чисел, первое - соответствует количеству сумматоров, заменяющих все умножители, а второе - количеству структурных сумматоров фильтра,

включающему сумматоры в звеньях и сумматор, объединяющий выходы двух фазовых цепей. Для звена первого порядка, число структурных сумматоров равно 3, а для звена второго порядка - 6, в предположении, что звенья реализуются на волновых адаптерах, как в [3].

Для ряда фильтров минимизировалась ошибка  $\tilde{\epsilon}$ , а параметр  $\Sigma$  не представлял интереса и в этих случаях его значения не указаны табл.2 (см. строки помеченные символом X в колонке  $\Sigma$ ).

Прочерк в последней колонке некоторых строк табл.2 означает, что представленные в них результаты не были найдены с помощью алгоритма МВИП и соответствуют решениям из [3]. Выше той или иной строки с прочерком показана строка с результатами, которые достигнуты с помощью алгоритма МВИП. Для фильтра 3 даны две строки с альтернативными результатами.

Как видим, лишь для 3-х из 11 фильтров, а именно 1, 3 и 6 алгоритмом МВИП не удалось достигнуть результатов [3]. При этом в случае фильтра 1 это имеет место для всех вариантов синтеза (разные значения N и M/m), а в случае фильтра 6 только для одного из трех вариантов, когда N=9. Эти данные позволяют судить, как сильно проигрывает алгоритм МВИП алгоритму исчерпывающего поиска [3]. Так, по длине слова M проигрыш составляет всего 1 бит (M=8 против 7) и лишь для фильтра 1, причем 8 бит требуется только для одного из коэффициентов. Проигрыш по максимальной ошибке  $\tilde{\epsilon}$  очень мал ( $\tilde{\epsilon}=0,833$  против 0,828) и имеет место лишь для фильтра 1. Проигрыш по общему числу сумматоров  $\Sigma$  наблюдается в четырех случаях и составляет не более 4-х сумматоров для фильтров 1 (при N=9, M=6 и 5), 3 и 6. Согласно табл.2 для фильтра 1 при N=9 и M=5 имеем  $\Sigma=41$  против 37; для фильтра 6 при N=9 имеем  $\Sigma=36$  против 32. В двух других случаях проигрыш соответствует лишь 1 сумматору.

Таблица 2. Результаты синтеза фильтров

№	N	M/m	$\Sigma$	$\Delta\tilde{a}$ , дБ	$\tilde{a}_0$ , дБ	$\tilde{\epsilon}$	$\Delta a$ , дБ; $f_1$ ; $f_2$ ; $N_0$
1	7	8/3	11+22=33	0,160	64,16	0,800	0,1166; 0,1996; 0,2470; 6,9
		7/3	11+22=33	0,164	60,12	0,986	-
		7	X	0,134	61,59	0,833	0,1262; 0,2004; 0,2523; 7
	9	6/3	10+28=38	0,052	61,71	0,821	0,0174; 0,2043; 0,2669; 9,35
		6/2	9+28=37	0,168	62,60	0,840	-
		5/3	13+28=41	0,169	60,37	0,958	0,0620; 0,1970; 0,2932; 8,4
9+28=37			0,170	61,07	0,885	-	
2	5	4/2	3+16=19	0,082	30,59	0,934	0,0002; 0,1057; 0,2173; 5
3	9	7/4	6+13=19	9,7e-5	46,50	0,944	XXX; XXX; 0,2818; 9*
		8/3		2,4e-5	52,67	0,464	XXX; XXX; 0,2808; 9
		5+13=18	4,5e-5	49,83	0,643	-	
4	5	4/2	2+16=18	0,0925	20,97/32,89	0,741	0,0026; 0,1697; 0,2502; 5*
		0,0513		17,35/36,92	0,680	0,0041; 0,1852; 0,2641; 5*	
		0,0459		26,43/34,86	0,571	0,0044; 0,1739; 0,2473; 4,8	
5	5	7/4	10+16=26	0,0425	44,26	0,970	0,0368; 0,2056; 0,2853; 5
6	7	6/3	8+22=30	0,0468	65,13	0,985	0,0062; 0,2081; 0,2813; 6,9
		6	X	0,108	67,55	0,745	0,0867; 0,2240; 0,2773; 6,8*
	9	5/3	8+28=36	0,0067	65,90	0,902	0,0016; 0,2154; 0,3055; 8,75
		5/2	4+28=32	0,182	65,71	0,933	-
11	8/3	7+16=23	8,5e-7	67,10	0,785	XXX; XXX; 0,2904; 11	
7	7	5/3	4+19=23	0,0079	42,66	0,789	0,0007; 0,2502; 0,3147; 7
		6/3	3+22=25	0,0083	42,63	0,834	0,0035; 0,2501; 0,3082; 6,6
8	5	6	X	0,706	63,53	0,718	0,4541; 0,2523; 0,3793; 5,2
9	7	6		0,0202	60,58	0,935	0,0109; 0,2163; 0,2782; 6,9
		8		0,0142	66,50	0,474	0,0094; 0,2129; 0,2896; 7,06
10	7	5		0,0865	54,04	0,866	0,0062; 0,0979; 0,1421; 7
11	15	8		6,3e-10	98,41	0,214	2,1e-12; 0,1934; 0,3066; 13,5

Введение в алгоритм ВИП переменной  $N_0$ , приведшее к алгоритму МВИП, оказалось целесообразным в 12 случаях из 22 (нецелые значения  $N_0$  в 12 строках последней колонки табл.2). Результаты для фильтров 2, 6 (при N=11) и 7 (при M=5) были получены ранее алгоритмом ВИП в [2], а для фильтров 6 (при N=7) и 11 – алгоритмом МВИП в [4], и приведены здесь для полноты. Результаты, помеченные знаком \* в последней колонке табл.2 для фильтров 3, 4 и 6, не были отражены в [3], но представляют определенный интерес.

Так, для полуполосного фильтра 3 найдено решение при  $M=7$  с общим числом сумматоров  $\Sigma=19$ . Соответствующие коэффициенты в (1) равны:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= 0, i=0,1,\dots,4; \beta_1=0,109375=1/8-1/64, \\ \beta_2 &=0,3515625=1/4+1/16+1/8(1/4+1/16)=(1+1/8)(1/4+1/16), \\ \beta_3 &=0,625=1/2+1/8, \beta_4=0,875=1-1/8.\end{aligned}$$

Благодаря исключению общего подвыражения в  $\beta_2$ , умножение на этот коэффициент может быть выполнено с помощью 2-х сумматоров вместо 3-х. В результате  $\Sigma=5+13=18$ , как и в [3], но при  $M=7$ , а не 8. В других ситуациях процедура исключения общих подвыражений может приводить к более ощутимым результатам и поэтому, как отмечено выше, ее желательно использовать в обсуждаемых алгоритмах и возможно в виде заранее просчитанных таблиц коэффициентов для экономии времени счета.

Для фильтра 4 найдены два решения с  $\Sigma=18$  при  $M=4$ , а не 5 как в [3]. В случае  $\tilde{\epsilon}=0,680$  имеем

$$\alpha_0=-0,125, \alpha_1=-0,25, \alpha_2=-0,1875, \beta_1=0,25, \beta_2=0,75,$$

а в случае  $\tilde{\epsilon}=0,741$  коэффициенты аналогичны за исключением  $\alpha_1=-0,3125$  и  $\alpha_2=-0,25$ .

Для фильтра 6 при  $N=7$  и  $M=6$  получено решение с  $\tilde{\epsilon}=0,745$  и коэффициентами

$$\alpha_0=-0,40625, \alpha_1=-0,515625, \alpha_2=-0,25, \alpha_3=-0,125, \beta_1=0,328125, \beta_2=0,640625, \beta_3=0,890625.$$

Для фильтров 1...11 компьютерное время синтеза алгоритмом МВИП (процессор 3 ГГц) составляет от ~2 с до ~6 мин, а алгоритмом [3] (процессор 1,4 ГГц) - от ~4 с до ~12 ч, исключая фильтры 7, 11, для которых время не указано. Если принять, что проблемными являются фильтры, для которых время счета с помощью алгоритма [3] составляет более ~30 мин, то к таковым относятся фильтр 1: время ~11,5 ч ( $N=9$ ,  $M=6$  или 5), фильтр 6: ~3,6 ч ( $N=7$ ) и 5,7 ч ( $N=9$ ), фильтр 9: ~2 ч ( $M=8$ ). В случае применения алгоритма МВИП соответственно имеем ~5 мин ( $M=6$ ), ~1,6 мин ( $M=5$ ), 46 с, ~1,6 мин и ~6 мин.

Отметим, что по оценкам [3] для фильтров 6 (при  $N=9$ ) и 9 (при  $M=8$ ) исчерпывающий поиск требует ~60 ч и ~40 ч, соответственно. Для этих фильтров авторы [3] сократили время до 5,7 ч и ~2 ч за счет уменьшения области поиска коэффициентов, что не позволяет говорить об оптимальности найденных решений в этих случаях. Подобное уменьшение области было выполнено и при использовании алгоритма МВИП, но лишь для фильтра 9 (при  $M=8$ ), что привело к уменьшению времени от ~43 мин до ~6 мин без изменения результата. С учетом поправки на быстродействие процессоров проведенные сравнения показывают существенное снижение времени за счет применения алгоритма МВИП вместо исчерпывающего поиска. Алгоритм МВИП реализован на "Си". Имеются резервы по сокращению времени счета.

**Заключение.** Алгоритмы исчерпывающего поиска являются наилучшими для нахождения глобально оптимальных решений задач целочисленного нелинейного программирования и в частности рассмотренных здесь задач синтеза БИХ-фильтров с конечной длиной слова коэффициентов. Однако, когда большое число переменных и/или огромная область поиска приводят к чрезмерным временным затратам компьютера эти алгоритмы становятся непригодными на практике. В этом случае можно использовать другие алгоритмы, и в частности ранее предложенный и проиллюстрированный здесь алгоритм МВИП, приводящий к хорошим результатам за приемлемое время. Действительно из 18 решений, найденных с помощью этого алгоритма, 12 - полностью совпадают с результатами исчерпывающего поиска, 2 - близки и еще 4 - очень близки к ним. Это интересные факты, которые могут быть полезны для дальнейшего изучения затронутой здесь проблемы.

#### Литература

1. Milic L. D., Lutovac M. D. Design of multiplierless elliptic IIR filters with a small quantization error. //IEEE Trans. 1999. SP-47. № 2. P. 469-479.
2. Мингазин А.Т. Синтез цифровых фильтров на основе фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов. //2-я международная конференция 'Цифровая обработка сигналов и ее применения' (DSPA). 1999. Т.1. С. 112-116.
3. Yli-Kaakinen J., Saramaki T. A systematic algorithm for the design of lattice wave digital filters with short-coefficient wordlength. //IEEE Trans. on CAS-I. 2007. V.54. № 8. P. 1838-1851.
4. Мингазин А. Модифицированный алгоритм синтеза цифровых фильтров на основе фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов. // Современная электроника. 2010. № 5. С. 74 -76.